УДК 621.979.6

А.В. АНЦИФЕРОВ, канд. техн. наук; ***А.А. БОГДАНОВ***,
Национальный горный университет, г. Днепропетровск

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЕЗВОЖИВАНИЯ

В статті розглядається математична модель процесу механічного обезводнення на основі рівняння дифузії. Розглянуті однорідне й неоднорідне рівняння дифузії. Приведено обґрунтування початкового та граничних умов і вид виразу для неоднорідного рівняння. Задача вирішується методом Фурье. Побудовані графічні залежності зміни вологості зразка з часом і по його довжині.

The mathematical model of mechanical dehydration process is examined in the article on the basis of diffusion equation. The homogeneous and the heterogeneous diffusion equation are considered. The grounding of initial and bordering conditions are given together with the view of heterogeneous equation. The problem is solved by Fourier method. The graphic dependences of sample humidity changing by time and its length are built.

Состояние вопроса. При добыче и переработке мела на первом этапе технологической цепи находится операция его обезвоживания [1, 2]. Мел, добытый из карьера в зимнее время, содержит до 30 – 35 % влаги. В этом случае экономически обоснованным оказывается использование механического способа обезвоживания [3] с использованием прессового оборудования. Различные конструкции прессов отличаются между собой способом воздействия на загруженную массу, геометрическими размерами прессовой камеры, скоростью нагружения, производительностью. Оказывают влияние и физико-механические свойства материала, начальная и требуемая конечная влажность продукта. Для оценки эффективности процесса механического способа обезвоживания требуется разработка его математической модели и исследование на ее основе влияния технологических параметров.

Прессовое оборудование нашло применение в угольной промышленности в брикетном производстве [4 – 5], но теоретическое решение задач данного класса не связано с изучением процесса перемещения жидкости в брикете. В процессах обогащения полезных ископаемых с использованием центрифуг и вакуум-фильтров существует класс задач, изучающих течение жидкости через пористые среды [6 – 9]. Интерес здесь представляет работа [7], в которой для решения задачи переноса вещества в тонких труднофильтруемых осадках предлагается использовать уравнение диффузии. Известно, что для решения дифференциального уравнения требуется подобрать начальные и граничные условия, которые корректно отвечали бы физике изучаемого процесса. Для уравнения диффузии рассматривают три основных типа граничных условий, которые применяются в комбинации друг с другом [10]. Существуют и другие более сложные граничные условия. Каждая из таких задач требует своего исследования.

Целью данной работы является разработка математической модели процесса механического обезвоживания при сжатии образца на основе неоднородного уравнения диффузии с выбором и обоснованием соответствующих начального и граничных условий.

Физическая модель. Составим модель нашего процесса на основе данных [10]. Пусть имеем трубку, заполненную пористой средой и во всякий момент времени концентрация влаги по сечению трубки одинаковая. Диффузия через стенку трубки отсутствует, поступление (уход) влаги возможен через торцевые сечения. Согласно экспериментальным исследованиям [11] при механическом сжатии брикета мела перемещением пуансона на величину L сначала происходит сжатие образца, а истечение жидкости происходит на конечном участке $0{,}2\,L$. Поэтому для упрощения модели и последующих расчетов считаем длину образца неизменной. Процесс движения влаги может быть описан функцией $C(x, t)$, представляющей влажность материала в сечении x в момент времени t. Уравнение диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right) + I(x,t), \qquad (1)$$

где D – коэффициент диффузии; c – коэффициент пористости; $I(x, t)$ – функция источников (поглотителей) влаги внутри трубки.

Считая коэффициент диффузии постоянным, уравнение (1) запишется:

$$C_t' = a^2 C_{xx}'' + I(x,t), \qquad (2)$$

где $a^2 = D/c$.

Для выделения единственного решения уравнения (2) необходимо к нему присоединить начальное и граничные условия. Принимаем, что в начальный момент времени концентрация влаги вдоль трубки длиной l одинаковая в любом сечении, т.е. начальное условие имеет вид:

$$C(x,0)=C_0. \tag{3}$$

В качестве первого граничного условия принимаем, что на левом конце трубки $x = 0$ концентрация влаги изменяется по закону:

$$C(0,t)=C_0\exp(-m\,t). \tag{4}$$

Уравнение (4) отвечает началу и концу процесса обезвоживания. При $t = 0$ имеем начальную влажность C_0. Если процесс обезвоживания идет время T, то конечная влажность в сечении $x = 0$ определится из соотношения:

$$C_{к0}=C_0\exp\left(-m\,T\right), \tag{5}$$

где μ – коэффициент пропорциональности.

Коэффициент μ определяется из (5) по известным значениям величин C_0, $C_{к0}$ и T. Для разного времени длительности процесса T_i можно определить соответствующие значения μ_i.

На правом конце трубки $x = l$ зададим значение производной:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(l,t)=-K\,C_0\{1-\exp\left[-m\left(T-t\right)\right]\}. \tag{6}$$

где K – коэффициент пропорциональности.

Выражение (6) характеризует величину потока влаги, проходящего через сечение l в момент времени t. В конце изучаемого процесса в момент времени $t = T$, когда прекращается движение жидкости $\frac{\partial C}{\partial x}(l,T)\equiv 0$.

В (4) и (6) для простоты мы используем один коэффициент μ, считая коэффициент диффузии постоянной величиной.

По аналогии закону Нернста из [10] масса воды, протекающая через сечение l за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, равна:

$$dQ(l,t)=DS\frac{dC}{dx}(l,t)\,dt.$$

Подставим сюда значение производной из (6) и проинтегрируем по времени. Получим, что за время T через сечение l пройдет количество жидкости:

$$Q(l, t) = DS\frac{KC_0}{m}\left[1 - mT - \exp(-mT)\right]. \tag{7}$$

С другой стороны количество ушедшей жидкости из образца объемом V:

$$Q(l,t) = C_0V - C_{к0}V = C_0\,V\left[1 - \exp\,(-mT)\right]. \tag{8}$$

В выражении (8) мы ввели еще одно допущение, считая конечную влажность одинаковой по всей длине образца и равной $C_{к0}$. Выражение для определения K получим, приравняв (7) и (8):

$$K = \frac{m\,V}{D\,S}\left(\frac{1 - \exp(-mT)}{1 - mT - \exp(-mT)}\right). \tag{9}$$

Математическая модель. Для ее построения решим уравнение (2) с использованием метода Фурье. При этом рассмотрим два случая.

1. Однородное уравнение диффузии, когда $I(x, t) = 0$.

Граничные условия (4) и (6) для функции $C(x, t)$ неоднородные. Вводим новую функцию:

$$F\,(x, t) = C\,(x, t) - U\,(x, t). \tag{10}$$

Здесь $U\,(x, t)$ известная функция, которую принимаем в виде:

$$U(x,t) = -K\cdot C_0\left[1 - \exp(-m(T-t)\cdot\frac{x}{l}\right]\cdot\frac{l^2 - x^2}{2\cdot l} + C_0\cdot\exp(-m\cdot t). \tag{11}$$

Выражение (11) подобрано с тем условием, чтобы функция $F\,(x, t)$ в (10) с учетом (4) и (6) для функции $C(x, t)$ удовлетворяло однородным граничным условиям:

$$F(0,t) = 0,\;\; F_x'(l,t) = 0. \tag{12}$$

Далее для $F\,(x, t)$ из (10) с учетом (3) и (11) имеем начальное условие:

$$F(x,0)=KC_0\{1-\exp[-m\,(T-t)\,]\,\}\frac{x^2}{2l}. \tag{13}$$

После подстановки (10) в (2) и последующих преобразований имеем:

$$F_t^{'}=a^2F_{xx}^{''}+a^2U_{xx}^{''}-U_t^{'}. \tag{14}$$

Уравнение (14) неоднородное. Решаем его методом Фурье.

Найдем систему собственных функций соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющих однородным граничным условиям (12). Полагаем $F(x, t) = X(x)\,T(t)$ и разделяя переменные в однородном уравнении $F'_t = a^2F''_{xx}$, получим уравнение для определения $X(x)$:

$$X''(x)+l^2X(x)=0,$$

откуда $X(x) = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)$. Для нахождения C_1, C_2, λ учтем граничные условия (12) для функции $F(x, t)$. Из них следует, что $X(0) = 0$, $X'(l) = 0$. Нетривиальные решения для $X(x)$, удовлетворяющие этим условиям, получаются при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, $l=\frac{(2k-1)p}{2l}$. Таким образом приходим к следующей системе собственных функций:

$$X_k(x)=\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2l}\quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{15}$$

Функцию $F(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (14), условиям (12) и (13) будем искать в виде суммы ряда по этой системе собственных функций:

$$F(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2l}, \tag{16}$$

предварительно разложив неоднородный член в уравнении (14) $a^2U_{xx}^{''}-U_t^{'}$ в ряд Фурье на интервале $0 - l$ по этой же системе функций. Обозначим его для определенности:

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2l}. \tag{17}$$

Подставим (16) и (17) в (14) и после преобразований приходим к системе дифференциальных уравнений для определения $f_k(t)$:

$$\frac{\partial\ f_k(t)}{\partial\, t} = -\frac{(2k-1)^2 p^{\,2} a^2}{4\, l^2}\ f_k(t) + s_k(t)\,. \qquad (18)$$

Выражения, определяющие начальные условия для функций $f_k(t)$ получим из (13) с учетом (16):

$$f_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \left[KC_0\{1-\exp[-m\,(T-t)\,]\}\frac{x^2}{2l}\right]\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2\,l}\,dx\,. \qquad (19)$$

Решая уравнения (18) при начальных условиях (19) находим коэффициенты $f_k(t)$ и подставляем их в (16). Затем, приняв во внимание связь между $F\,(x,\,t)$ и $C\,(x,\,t)$ из (10) получим:

$$C(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\,[\,f_k(t) + s_k(t)]\sin\frac{(2k-1)p\ x}{2\,l}\,. \qquad (20)$$

2. Неоднородное уравнение диффузии, когда $I(x,\,t) \neq 0$.

Как и в предыдущем случае вводим новую неизвестную функцию $F\,(x,\,t)$ на первом этапе в виде (10), представляющей отклонение от некоторой известной функции $U\,(x,\,t)$ в виде (11).

Функция $F\,(x,\,t)$ определяется как решение уравнения:

$$F_t^{'} - a^2 F_{xx}^{''} = \bar{I}(x,t). \qquad (21)$$

где $\bar{I}(x,t) = I(x,t) - \left[U_t^{'} - a^2 U_{xx}^{''}\right]$.

В уравнении (21) функция $I\,(x,\,t)$ берется со знаком плюс для источников влаги и минус – для поглотителей.

Оставляем начальное и граничные условия для функции $C\,(x,\,t)$ теми же, что и в предыдущем случае. Тогда опять получаем для уравнения (21) однородные граничные условия в виде (12) и начальное условие в виде (13).

Для нахождения искомой функции $F\,(x,\,t)$ на первом этапе рассмотрим уравнение (21) без правой части (однородное уравнение) при полученных для него однородных граничных условиях (12). Как и выше находим семейство собственных функций (15).

На втором этапе возвращаемся к неоднородному уравнению (21) и ищем его решение в виде суммы ряда по собственным функциям (16). Здесь коэффициенты $f_k(t)$ надо подобрать с таким расчетом, чтобы функция, определяемая рядом (16), удовлетворяла неоднородному уравнению (21) и данному начальному условию.

Представим функцию $\bar{I}(x, t)$ в виде ряда:

$$\bar{I}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}_k(t) \sin \frac{(2k-1)p\ x}{2\,l}, \tag{22}$$

где $\bar{p}_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{I}(x, t) \sin \frac{(2k-1)p\ x}{2\,l}\, dx$.

Подставляем предполагаемую форму решения (16) с учетом (22) в уравнение (21) и будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)p\ x}{2\,l} \left\{ \frac{d\ f_k(t)}{d\,t} + \frac{(2k-1)^2\, p^{\ 2}}{4\,l^2} a^2 f_k(t) - \bar{p}_k(t) \right\} = 0 .$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.:

$$\frac{d\ f_k(t)}{d\,t} = -\frac{(2k-1)^2\, p^{\ 2}}{4\,l^2} a^2 f_k(t) + \bar{p}_k(t). \tag{23}$$

Решаем обыкновенные дифференциальные уравнения (23) с нулевыми начальными условиями (19) находим $f_k(t)$. Окончательно получаем решение исходной задачи в виде:

$$C(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(t) + p_k(t)] \sin \frac{(2k-1)p\ x}{2\,l}, \tag{24}$$

где $p_k(t)$ – коэффициенты ряда Фурье выражения $p_k(t) = \bar{p}_k(t) + \left[U_t^{'} - a^2 U_{xx}^{''}\right]$.

В выражении (21) требуется задаться видом функции $I(x, t)$. В нашем случае она играет роль поглотителя влаги, но не должна нарушать заданные начальное и граничные условия. С учетом размерности, начального условия (3) и граничного на левом конце трубки (4) выбираем функцию $I(x, t)$ в виде:

$$I(x,t) = I_0 \frac{C_0}{T} \frac{x}{l} [1 - \exp(-mt)], \tag{25}$$

где I_0 – коэффициент пропорциональности.

Таким образом из (25) при $x = 0$ и $t = 0$ уравнение (2) превращается в однородное при соответствующих граничных условиях. Т.е. функция $I(x, t)$ влияет на процесс диффузии влаги только при $x > 0$ и $t > 0$.

Результаты расчетов показаны на рис. 1 – 3. При этом были заданы исходные величины: $C_0 = 30\%$, $C_к = 15\%$, $x = 0.1$ м, $I_0 = 1000$, $a = 0.04$ (определено из эксперимента).

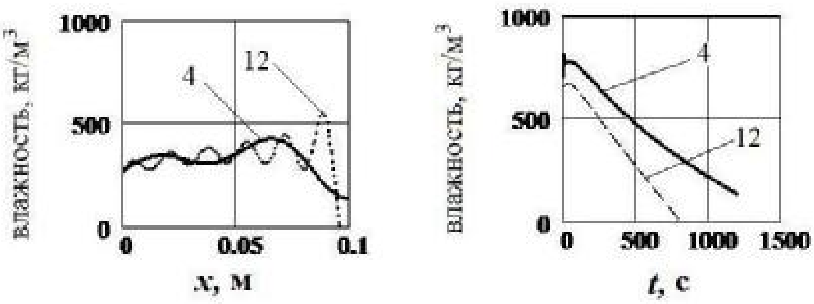


Рис. 1. Зависимость концентрации влаги по длине образца (а) и от длительности процесса обезвоживания (б) для 4 и 12 членов ряда

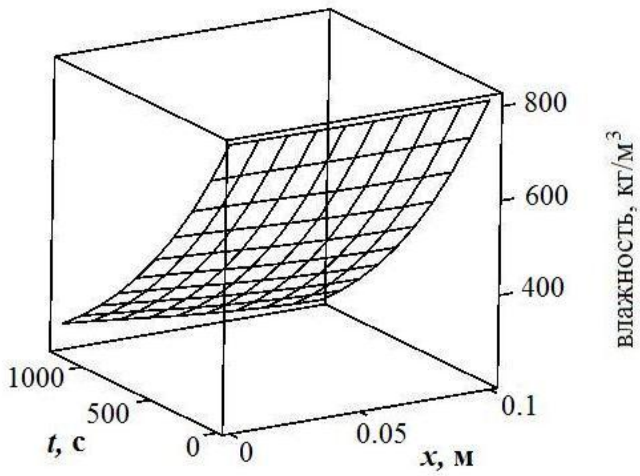
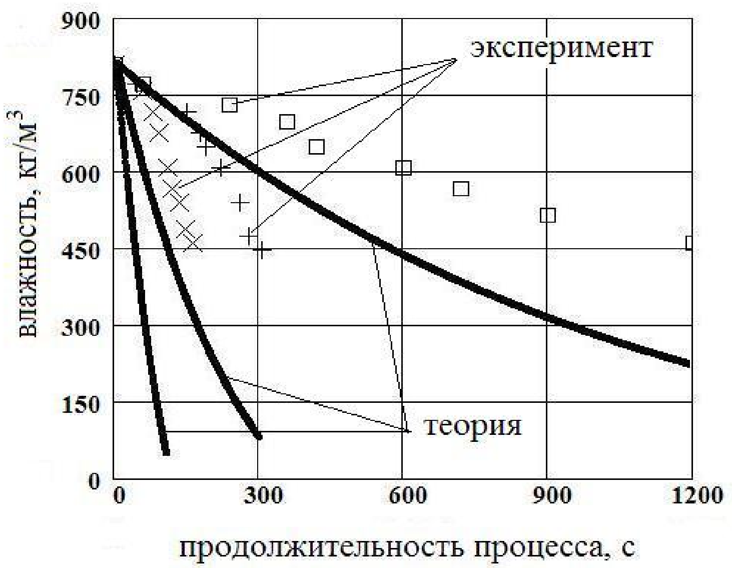


Рис. 2. Зависимость концентрации влаги по длине образца x и от длительности процесса обезвоживания t для неоднородного уравнения ($I_0 = 1000$)



□ – 1200 с; + – 300 с; ´ – 150 с

Рис. 3. Сравнение расчетных и экспериментальных данных при разных длительностях процесса нагружения

Выводы.

1) Разработанная в данной статье математическая модель с использованием неоднородного уравнения диффузии качественно отражает процесс механического обезвоживания под действием сжимающей силы.

2) При решении уравнения диффузии возможно использование метода Фурье с достаточным числом членов ряда k = 4.

3) Неоднородный член в уравнении диффузии выполняет роль “внешнего” поглотителя влаги и эквивалентен сжимающему усилию на материал.

4) Теоретические кривые располагаются ниже экспериментальных точек, что объясняется принятыми допущениями: постоянный коэффициент диффузии и постоянное значение конечной влажности по длине образца.

5) Представляет интерес развитие данной задачи в части усложнения граничных условий.

Список литературы: **1.** *Паус К.Ф., Евтушенко Н.С.* Химия и технология мела. – М.: Стройиздат, 1977. – 137 с. **2.** *Нискевич М.А., Ратьковский Л.П.* Обогащение нерудных строительных материалов. – М.: Госстройиздат., 1983. **3.** *Иванов Н.С., Мясников Н.Ф.* Производство и потребление мела. – Белгород: Полиграф-интер, 2000. – 263 с. **4.** *Крохин В.Н.* Брикетирование углей. – М.: Недра, 1984. – 224 с. **5.** *Елишевич А.Т.* Брикетирование полезных ископаемых. – Киев: Лыбидь, 1990. – 295 с. **6.** *Гончаренко Е.А.* Обобщенная модель процесса фильтрования тонкодисперсных шламов // Збагачення корисних копалин: Наук.техн.зб. – 2001. – Вип. 13(54) – С. 125 – 130. **7.** *Гарковенко Е.Е.* Анализ уравнения переноса вещества в пористой среде тонкодисперсных осадков // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2003. – Вип. 7. – С. 49 – 55. **8.** *Назимко О.І., Гарковенко Є.Є., Морозова В.Г.* Аналітичне дослідження впливу проникності осадів на переміщення речовини в породах. // Збагачення корисних копалин: Наук. техн. зб. – 2004. – Вип. 20(61). – С. 83 – 88. **9.** *Пейчев И.Д.* Исследование теоретических закономерностей течения жидкости через пористую среду. // Збагачення корисних копалин: Наук. техн .зб. – 2004. – Вип. 20(61). – С. 99 – 104. **10.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. **11**. *Анциферов А.В., Богданов А.А.* Результаты экспериментальных исследований по механическому обезвоживанию мела // Збагачення корисних копалин: Наук. техн. зб. – 2007. – Вип. 29(70) – 30(71). – С. 190 – 194.

Поступила в редколлегию 12.02.08

УДК 666.31

Е.В. КОНДРАЩЕНКО, докт. техн. наук, ***А.А. БАРАНОВА***, ХНАГХ
А.Н. БАРАНОВ, докт. техн. наук, УИПА

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ЧАСТИЦ ОБОЖЖЕННОГО ГИПСА В КАМЕРЕ ТОМЛЕНИЯ

В статті приведена розроблена оригінальна технологія випалу гіпсового в’яжучого. Розроблен метод, який описує необхідне розподілення температур в частках гіпсу після опалу на першому етапі для умов їх теплообробки на другому етапі. Розраховано відношення між об’ємами різних зон у частці гіпсу для отримання α-полугідрата сульфату кальцію.

Designed original technology of the burning gypsum binding is brought in the paper. The designed method, witch is describing the temperature distribution in the particles of the gypsum after burning on the first stage for conditions their calcining on the second stage. Correlation between volumes of the different zones in particles of the gypsum for reception α- hemihydrate of sulphate calcium was calculate.

Традиционная технология обжига гипса во вращающихся печах, как известно, приводит к значительному ослаблению структуры гипса в связи с резким удалением воды в виде пара. Поэтому технология получения т.н. β-формы полугидрата сульфата кальция предусматривает остывание гипса после обжига в камере томления, чтобы избежать резкого перепада температуры частиц и еще большего разрушения их кристаллической решетки [1].

Для получения α-формы гипсового вяжущего используют технологии, в которых предусмотрено наличие не только температуры, но и давления, чтобы обеспечить частичное удаление воды в жидком состоянии из сырья. В та-